

Matrizen

Marius Schulz & Martin Mundt

Inhaltsverzeichnis

1	Definition	2
2	Sonderfälle	2
2.1	Zeilen- und Spaltenmatrix	2
2.2	Einheitsmatrix	2
3	Addition und Multiplikation	3
3.1	Addition und Subtraktion	3
3.2	Multiplikation	3
3.2.1	Skalarmultiplikation	3
3.2.2	Matrizenmultiplikation	3
4	Determinanten	4
4.1	Berechnung der Determinanten für Matrizen mit $n = 2$	4
4.2	Berechnung der Determinanten für Matrizen mit $n \geq 3$	5
4.2.1	Beispiel	5
4.3	Sarrussche Regel	5
5	Transponierte Matrix	6
5.1	Beispiele	6
6	Inverse Matrix	6
6.1	Berechnung von A^{-1}	6
6.1.1	Beispiel	6
7	Affine Abbildungen	7
7.1	Bekannte Abbildungen in Matrixschreibweise	7
7.1.1	Die Verschiebung	7
7.1.2	Die zentrische Streckung	7
7.1.3	Die Drehung	8
7.1.4	Die Achsenspiegelung	8

1 Definition

Eine Matrix (Mehrzahl: Matrizen) ist ein **rechteckiges Zahlenschema**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dies ist eine $(m \cdot n)$ -Matrix mit m Zeilen, n Spalten und $m \cdot n$ Elementen.

2 Sonderfälle

2.1 Zeilen- und Spaltenmatrix

Ist $m = 1$, so besteht die Matrix nur aus einer Zeile. Daher nennt man sie auch **Zeilenmatrix**:

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

Ist $n = 1$, so besteht die Matrix nur aus einer Spalte. Daher nennt man sie auch **Spaltenmatrix**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Zeilen- und Spaltenmatrix sind uns bereits als **Vektoren** bekannt. Deshalb kann man die Matrizenrechnung als Verallgemeinerung der Vektorrechnung bezeichnen.

2.2 Einheitsmatrix

Die **Einheitsmatrix** E ist eine quadratische Matrix, deren Hauptdiagonale nur aus Einsen besteht. Alle anderen Elemente sind 0.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix ist das **neutrale Element** der Matrizenmultiplikation, d.h. die Multiplikation einer Matrix A mit einer Einheitsmatrix E ergibt wieder die Matrix A .

3 Addition und Multiplikation

3.1 Addition und Subtraktion

Für die Addition zweier Matrizen gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Die Subtraktion zweier Matrizen wird äquivalent durchgeführt, indem elementweise subtrahiert wird:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$$

Allgemein lässt sich schreiben: $A + B = C$ mit $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$. Damit gelten sowohl das Kommutativgesetz als auch das Assoziativgesetz.

3.2 Multiplikation

Bei der Multiplikation von Matrizen unterscheiden wir zwischen der Multiplikation der Matrix mit einem **Skalarfaktor** und der Multiplikation mit einer weiteren **Matrix**.

3.2.1 Skalarmultiplikation

Wird eine Matrix B mit einem Skalarfaktor s multipliziert, entspricht dies – wenn $s \in \mathbb{N}$ – dem s -maligen Addieren der Matrix mit sich selbst: $s \cdot A = B$. Dafür wird jedes Element der Matrix mit s multipliziert:

$$s \cdot A = s \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_{11} & s \cdot a_{12} \\ s \cdot a_{21} & s \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

3.2.2 Matrizenmultiplikation

Die Multiplikation zweier Matrizen A und B erfolgt – im Vergleich zur Addition zweier Matrizen – nicht elementweise (nicht: $a_{ij} \cdot b_{ij} = p_{ij}$). Die Elemente der Produktmatrix P entstehen jeweils als Produkt einer Zeile der Matrix A mit einer Spalte der Matrix B :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix} = P$$

Die Matrizenmultiplikation ist nicht auf quadratische Matrizen beschränkt, sondern kann für alle Matrizenpaare durchgeführt werden, bei denen die **Zeilenanzahl** der einen mit der **Spaltenanzahl** der anderen Matrix übereinstimmt.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_{11} &= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & p_{12} &= a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\
p_{21} &= a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & p_{22} &= a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32}
\end{aligned}$$

Für die **Größe der Produktmatrix** gilt: $A_{(m \cdot n)} \cdot B_{(n \cdot k)} = P_{(m \cdot k)}$

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1}) = (c_{11})$$

Vertauscht man die beiden Matrizen, ergibt sich eine quadratische $(n \cdot n)$ -Matrix:

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \cdot (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}) = \begin{pmatrix} b_{11} \cdot a_{11} & b_{11} \cdot a_{12} & \cdots & b_{11} \cdot a_{1n} \\ b_{21} \cdot a_{11} & b_{21} \cdot a_{12} & \cdots & b_{21} \cdot a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} \cdot a_{11} & b_{n1} \cdot a_{12} & \cdots & b_{n1} \cdot a_{1n} \end{pmatrix}$$

Multipliziert man also eine Matrix mit einem Vektor, so erhält man als Produkt erneut einen Vektor. Im Vergleich zur Addition von Matrizen ist die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ! Sie genügt allerdings weiterhin sowohl dem Assoziativgesetz als auch dem Distributivgesetz.

4 Determinanten

Die **Determinante** ist eine spezielle Funktion, die einer quadratischen Matrix einen Skalar zuordnet. Nicht-quadratische Matrizen besitzen keine zugehörige Determinante. Die Determinante ist ebenfalls ein quadratisches Zahlenschema und unterscheidet sich von einer Matrix in der Schreibweise nur durch senkrechte Striche, die die runden Klammern ersetzen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4.1 Berechnung der Determinanten für Matrizen mit $n = 2$

Für eine $(2 \cdot 2)$ -Matrix berechnet man die Determinante durch Subtraktion des Produktes der Nebendiagonale vom Produkt der Hauptdiagonale:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

4.2 Berechnung der Determinanten für Matrizen mit $n \geq 3$

Es soll die Determinante einer $(3 \cdot 3)$ -Matrix A berechnet werden:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Dafür berechnet man die Summe der drei Unterdeterminanten $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$, die mit dem jeweils **zeilen- und spaltenfremden Element** multipliziert werden:

$$\det A = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Die Unterdeterminanten werden entsprechend dem nachfolgenden Schema mit 1 bzw. (-1) multipliziert:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Dieses Verfahren verläuft für größere Matrizen analog. Die Determinante wird bei jeder Anwendung um eine Dimension reduziert, sodass das Verfahren bei $n \geq 4$ mehrfach angewendet werden muss.

4.2.1 Beispiel

Es soll die folgende Determinante berechnet werden:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 - 0 = -1$$

4.3 Sarrussche Regel

Die **Regel von Sarrus** ist eine spezielle Auflösungsformel für Determinanten von $(3 \cdot 3)$ -Matrizen. Dabei werden die zwei ersten Spalten der Determinante nochmals rechts ergänzt.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix}$$

Anschließend wird die Determinante mit Hilfe von Diagonalen wie folgt berechnet:

$$\det A = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

5 Transponierte Matrix

Die **Transponierte** der Matrix A der Größe $(m \cdot n)$ ist die Matrix A^T der Größe $(n \cdot m)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beim Transponieren der Matrix wird diese an ihrer Hauptdiagonalen gespiegelt. Somit wird aus dem Element A_{ij} das Element A_{ji} .

5.1 Beispiele

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

6 Inverse Matrix

Für Matrizen ist explizit keine Division definiert. Für eine Matrix A existiert die zugehörige **inverse Matrix** A^{-1} , wenn

1. A quadratisch ist und
2. $\det A \neq 0$.

6.1 Berechnung von A^{-1}

Die inverse Matrix $A^{-1} = X$ wird berechnet, indem das Produkt der Matrix A und der Matrix X mit der Einheitsmatrix E gleichgesetzt wird:

$$A \cdot X = E$$

Die Lösung der Gleichung ist also im Grunde eine **Division**.

6.1.1 Beispiel

Es soll die zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ inverse Matrix gebildet werden.

$$A \cdot X = E$$

Setzt man die bekannten Größen in die obige Formel ein, so ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun stellt man das zugehörige Gleichungssystem der einzelnen Komponenten auf:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_{11} + 1 \cdot x_{21} = 1 \\ 1 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{21} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \cdot x_{12} + 1 \cdot x_{22} = 0 \\ 1 \cdot x_{12} + 0 \cdot x_{22} = 1 \end{cases}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt $x_{11} = 0$, $x_{12} = 1$, $x_{21} = 1$ und $x_{22} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7 Affine Abbildungen

Eine **affine Abbildung** ist eine Abbildung zwischen zwei affinen Räumen¹, die Kollinearitäten² und Abstandsverhältnisse paralleler Strecken erhält. Die allgemeine Form einer solchen affinen Abbildung α ist:

$$\alpha : \vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{t} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Die Matrix A wird als **Koeffizientenmatrix** bezeichnet.

7.1 Bekannte Abbildungen in Matrizeschreibweise

Im Folgenden werden die Matrixdarstellungen derjenigen Abbildungen genannt, die aus der Geometrie der Sekundarstufe I bekannt sind. An dieser Stelle beschränken wir uns auf die Darstellung der Abbildungsgleichungen für den \mathbb{R}^2 .

7.1.1 Die Verschiebung

Eine einfache **Verschiebung** des Vektors um den Vektor \vec{v} wird durch folgende affine Abbildung dargestellt:

$$\vec{x}' = E \cdot \vec{x} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

7.1.2 Die zentrische Streckung

Die affine Abbildung für die **Streckung** eines Ursprungsvektors mit dem Streckfaktor k ist $\vec{x}' = k \cdot \vec{x}$. Die Matrixdarstellung sieht wie folgt aus:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \cdot E \cdot \vec{x}$$

¹Der **affine Raum** im engsten Sinne ist ein mathematisches Modell für den uns vertrauten dreidimensionalen Raum.

²**Kollinearität** ist ein mathematischer Begriff, der in der Geometrie und in der linearen Algebra verwendet wird. In der Geometrie nennt man Punkte, die auf einer Geraden liegen, kollinear.

Liegt das Zentrum der Streckung nicht im Ursprung $O(0|0)$, sondern im Punkt $Z(z_1|z_2)$, so wird vor der Streckung eine Verschiebung um $-\vec{z}$ durchgeführt, wodurch $Z(z_1|z_2)$ auf $O(0|0)$ fällt. Anschließend wird die Streckung wie gehabt durchgeführt, gefolgt von einer Verschiebung um \vec{z} , die die anfängliche Verschiebung rückgängig macht.

7.1.3 Die Drehung

Die affine Abbildung für die **Drehung** eines Vektors \vec{x} um den Winkel φ um den Ursprung sieht folgendermaßen aus:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \vec{x}$$

Eine Matrix der Form T wird **Drehmatrix** einer Drehung um den Ursprung genannt. Die Drehung erfolgt im mathematisch positiven Drehsinne, d.h. bei positiven Werten von φ **gegen** den Uhrzeigersinn.

Liegt das Drehzentrum $Z(z_1|z_2)$ nicht im Ursprung, so wird vor der Drehung eine Verschiebung um $-\vec{z}$ durchgeführt, die das Drehzentrum auf den Ursprung fallen lässt. Nachdem die Drehung um den Ursprung durchgeführt wurde, wird die durchgeführte Verschiebung mit einer weiteren Verschiebung um \vec{z} rückgängig gemacht.

7.1.4 Die Achsenspiegelung

Um eine **Achsenspiegelung** an einer Ursprungsgeraden $y = m \cdot x$ durchzuführen, verwendet man folgende affine Abbildung:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1} \\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \cdot \vec{x}$$

S bezeichnet man als **Spiegelmatrix**.

Um eine **Achsenspiegelung** an einer beliebigen Geraden $y = m \cdot x + b$ durchzuführen, verwendet man folgende abgewandelte Abbildungsgleichung:

$$\vec{x}' = S \cdot (\vec{x} - \vec{b}) + \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Literaturverzeichnis

- [1] Matrizen und Determinanten, Gudrun Demmig, demmig verlag, 1994
- [2] Affine Abbildungen im \mathbb{R}^2 , Mario Spengler, 02.04.2009
- [3] [http://de.wikipedia.org/wiki/Matrix_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Matrix_(Mathematik))
- [4] http://de.wikipedia.org/wiki/Affine_Abbildung